BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2014

MATHÉMATIQUES

Série ES

Durée de l'épreuve : 3 heures **Coefficient : 7 (ES)**

ES : ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément à la réglementation en vigueur.

- *Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.*
- *Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.*
- *Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.*
- *Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.*

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

EXERCICE 1 (5 points) Commun à tous les candidats

Partie A

Document 1 : *« En France, pendant l'année scolaire 2009-2010, sur 81 135 étudiants inscrits en classe préparatoire aux grandes écoles (CPGE), on pouvait trouver 34 632 filles. »*
(Source : Repères et références statistiques sur les enseignements, la formation et la recherche Edition 2010)

Selon l'INSEE, la proportion de filles parmi les jeunes entre 15 et 24 ans est de 49,2%.

Peut-on considérer, en s'appuyant sur le **document 1** que les filles inscrites sont sous-représentées en CPGE ? Justifier la réponse.
On pourra utiliser un intervalle de fluctuation.

Partie B

Les étudiants des CPGE se répartissent en 3 filières :
- la filière scientifique (S) accueille 61,5 % des étudiants ;
- la série économique et commerciale (C) accueille 24 % des étudiants ;
- les autres étudiants suivent une filière littéraire (L).

Document 2 : *« En classes littéraires, la prépondérance des femmes semble bien implantée : avec trois inscrites sur quatre, elles y sont largement majoritaires. Inversement, dans les préparations scientifiques, les filles sont présentes en faible proportion (30 %) alors qu'on est proche de la parité dans les classes économiques et commerciales. »*
(Même source)

On considère que parmi tous les inscrits en CPGE en 2009-2010, la proportion de fille est 42,7%.

On interroge au hasard un étudiant en CPGE. On considère les événements suivants :

F : l'étudiant interrogé est une fille ;
S : l'étudiant interrogé est inscrit dans la filière scientifique ;
C : l'étudiant interrogé est inscrit dans la filière économique et commerciale ;
L : l'étudiant interrogé est inscrit dans la filière littéraire.

1. Donner les probabilités $P(S)$, $P(C)$, $P_L(F)$, $P_S(F)$ et $P(F)$. Construire un arbre pondéré traduisant cette situation. Cet arbre sera complété au fur et à mesure de l'exercice.

2. a) Calculer la probabilité que l'étudiant interrogé au hasard soit une fille inscrite en L.

   b) Calculer la probabilité de l'événement $F \cap S$.

   c) En déduire que la probabilité de l'événement $F \cap C$ est 0,13375.

3. Sachant que l'étudiant interrogé suit la filière économique et commerciale, quelle est la probabilité qu'il soit une fille ? On arrondira le résultat au millième.
   Confronter ce résultat avec les informations du **document 2**.

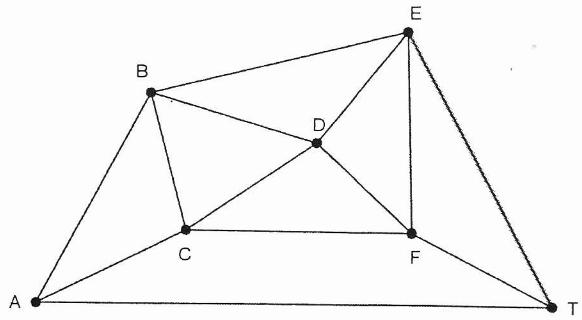
4. Sachant que l'étudiant interrogé est une fille, quelle est la probabilité qu'elle soit inscrite dans la filière littéraire L ? On arrondira le résultat au millième.

EXERCICE 2 (5 points) **Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Partie A

Le graphe ci-dessous représente, dans un aéroport donné, toutes les voies empruntées par les avions au roulage . Ces voies, sur lesquelles circulent les avions avant ou après atterrissage, sont appelées *taxiways.*

Les arêtes du graphe représentent les voies de circulation (les « taxiways ») et les sommets du graphe sont les intersections.

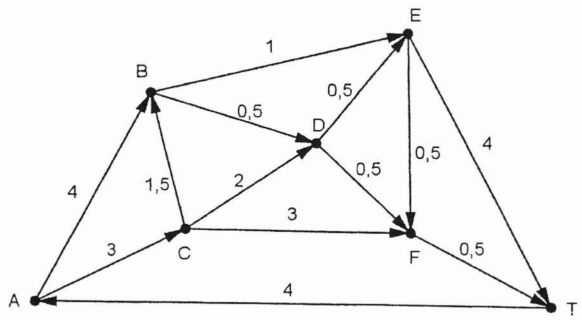


1. Déterminer le nombre de voies de circulation au total.

2. Afin que l'aéroport soit déneigé le plus rapidement possible, est-il possible de planifier un parcours pour que les chasse-neige passent par toutes les voies sans emprunter plusieurs fois la même route ? Justifier la réponse et donner un tel parcours.

Partie B

Dans le graphe ci-dessous, on a indiqué le sens de circulation pour les avions dans les différentes voies ainsi que le temps de parcours pour chacune en minute(s).



1. a) Écrire la matrice M associée à ce graphe (ranger les sommets dans l'ordre alphabétique).

b) Citer tous les chemins de longueur 3 reliant A à T.

2. L'avion qui a atterri est en bout de piste en A et doit se rendre le plus rapidement possible au terminal situé au point T.
Déterminer l'itinéraire le plus rapide et en donner la durée.

EXERCICE 2 (5 points)

Candidats ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats L

Une entreprise fabrique chaque jour des objets. Cette production ne peut dépasser 700 objets par jour.

On modélise le coût total de production par une fonction C.
Lorsque x désigne le nombre d'objets fabriqués, exprimé en centaines, $C(x)$, le coût total correspondant, est exprimé en centaines d'euros.

La courbe représentative de la fonction C est donnée en **annexe**.

Partie A

Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes en arrondissant au mieux. On laissera apparents les traits de construction sur la figure donnée en **annexe**.

1. Quel est le coût total de production pour 450 objets ?

2. Combien d'objets sont produits pour un coût total de 60000 euros ?

3. On considère que le coût marginal est donné par la fonction C' dérivée de la fonction C.

a) Estimer le coût marginal pour une production de 450 objets puis de 600 objets.

b) Que pensez-vous de l'affirmation : « le coût marginal est croissant sur l'intervalle $[0\ ;\ 7]$ » ?

Partie B

Le prix de vente de chacun de ces objets est de 75 euros.

1. On note r la fonction « recette ». Pour tout nombre réel x dans l'intervalle $[0\ ;\ 7]$, $r(x)$ est le prix de vente, en centaines d'euros, de x centaines d'objets.
Représenter la fonction r dans le repère donné en annexe.

2. En utilisant les représentations graphiques portées sur l'annexe, répondre aux questions qui suivent.

a) En supposant que tous les objets produits sont vendus, quelle est, pour l'entreprise, la fourchette maximale de rentabilité ? Justifier la réponse.

b) Que penser de l'affirmation : « il est préférable pour l'entreprise de fabriquer 500 objets plutôt que 600 objets » ?

EXERCICE 3 (5 points) Commun à tous les candidats

La suite (u_n) est définie pour tout nombre entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 1 \end{cases}$$

Partie A

1. On souhaite écrire un algorithme affichant, pour un entier naturel n non nul donné, tous les termes de la suite, du rang 0 au rang n.
Parmi les trois algorithmes suivants, un seul convient.
Indiquer lequel et justifier pourquoi les deux autres ne peuvent donner le résultat attendu.

Variables : U est un nombre réel i et N sont des nombres entiers **Début** Saisir une valeur pour N U prend la valeur 5 Pour i de 0 à N faire Affecter à U la valeur $\frac{1}{2} \times \mathrm{U} + 1$ Fin Pour Afficher U **Fin**	**Variables :** U est un nombre réel i et N sont des nombres entiers **Début** Saisir une valeur pour N Pour i de 0 à N faire U prend la valeur 5 Afficher U Affecter à U la valeur $\frac{1}{2} \times \mathrm{U} + 1$ Fin Pour **Fin**	**Variables :** U est un nombre réel i et N sont des nombres entiers **Début** Saisir une valeur pour N U prend la valeur 5 Pour i de 0 à N faire : Afficher U Affecter à U la valeur $\frac{1}{2} \times \mathrm{U} + 1$ Fin Pour **Fin**
algorithme 1	**algorithme 2**	**algorithme 3**

2. On saisit la valeur 9 pour N, l'affichage est le suivant :

5	3,5	2,75	2,375	2,1875	2,0938	2,0469	2,0234	2,0117	2,0059

Quelle conjecture peut-on émettre sur le sens de variation de cette suite ?

Partie B

On introduit une suite auxiliaire (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 2$.

1. Montrer que (v_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison q et son premier terme v_0.

2. Montrer que, pour tout nombre entier naturel n, on a $u_n = 2 + 3\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

3. Etudier les variations de la suite (u_n).

4. Déterminer la limite de la suite (u_n).

5. À partir de quel rang a-t-on : $u_n - 2 \leqslant 10^{-6}$?

EXERCICE 4 (5 points) Commun à tous les candidats

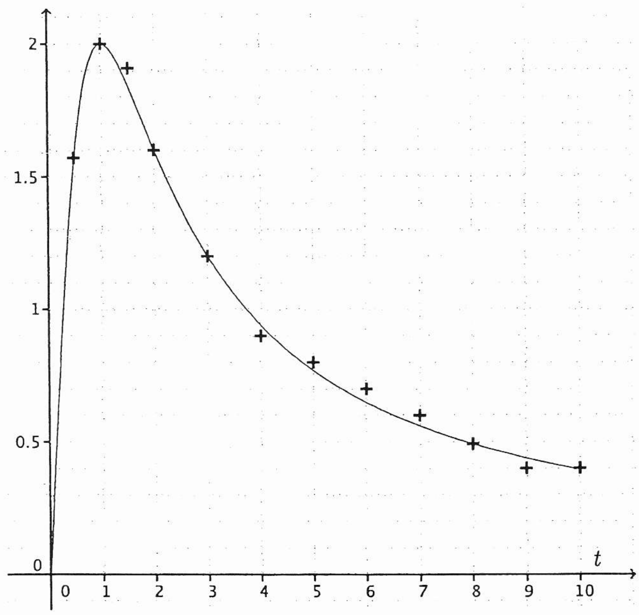
Les antibiotiques sont des molécules possédant la propriété de tuer des bactéries ou d'en limiter la propagation.

Le tableau ci-dessous donne la concentration dans le sang en fonction du temps d'un antibiotique injecté en une seule prise à un patient.

Temps en heure	0,5	1	1,5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Concentration en mg/l	1,6	2	1,9	1,6	1,2	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,4

Ces données conduisent à la modélisation de la concentration en fonction du temps par la fonction g définie sur l'intervalle $[0 ; 10]$ par $g(t) = \dfrac{4t}{t^2+1}$.
Lorsque t représente le temps écoulé, en heures, depuis l'injection de l'antibiotique, $g(t)$ représente la concentration en mg/l de l'antibiotique.

Le graphique suivant représente les données du tableau et la courbe représentative de la fonction g.



1. Par lecture graphique donner sans justification :
   a) les variations de la fonction g sur $[0 ; 10]$;
   b) la concentration maximale d'antibiotique lors des 10 premières heures ;
   c) l'intervalle de temps pendant lequel la concentration de l'antibiotique dans le sang est supérieure à 1,2 mg/l.

2. a) La fonction g est dérivable sur l'intervalle $[0 ; 10]$ et sa dérivée est g'.
   Montrer que : $g'(t) = \dfrac{4(1-t^2)}{(t^2+1)^2}$

   b) En utilisant l'expression de $g'(t)$, montrer que la concentration maximale serait, avec cette modélisation, atteinte exactement 1 heure après l'injection.

3. On admet que G définie sur $[0 ; 10]$ par $G(t) = 2\ln(t^2+1)$ est une primitive de g sur cet intervalle.
   Quelle est la concentration moyenne de l'antibiotique pendant les 10 premières heures ?
   Donner la valeur exacte et la valeur arrondie au millième.
   Rappel : la valeur moyenne d'une fonction f sur $[a ; b]$ est donnée par $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

4. On définit la CMI (Concentration Minimale Inhibitrice) d'un antibiotique comme étant la concentration au dessus de laquelle les bactéries ne peuvent plus se multiplier.
   La CMI de l'antibiotique injecté est 1,2 mg/l.
   Déterminer, par le calcul, le temps d'antibiotique utile c'est-à-dire la durée pendant laquelle la concentration de l'antibiotique étudié est supérieure à sa CMI.